un reto más

BOLETÍN SEMESTRAL
NÚMERO 5
julio 1999

sep

Presentación

A diferencia de lo que ha sucedido con los números 1, 2 y 3 del boletín *Un reto más*, nos llama la atención que para el número 4 hubo poca respuesta de nuestros compañeros maestros, incluso para las secciones *Problemas para resolver* y *Matemáticas en los libros de texto gratuitos y los materiales de apoyo*.

Una de las posibles razones que explican lo anterior es quizás, que en esta ocasión, muchos compañeros no hayan recibido el boletín, ya que los primeros envíos se hicieron por correo, mientras que en el último quisimos hacerlo de manera más directa aprovechando la presencia, en la Ciudad de México, de compañeros vinculados con los Centros de Maestros y a las Escuelas Normales de cada región. La idea era distribuirlo de manera más eficaz. Aunque, por supuesto, no descartamos la posibilidad de que el contenido del boletín no haya despertado el interés que esperábamos.

Conocer su opinión permitirá tomar decisiones para adecuar su contenido a los intereses y necesidades de los maestros y modificar los mecanismos de distribución.

Agradecemos a los maestros que enviaron respuestas para algunas de las situaciones publicadas en los boletines 3 y 4 e invitamos a todos los maestros a revisar los números anteriores y a que nos manden sus comentarios o procedimientos de solución sobre aquellos problemas o preguntas que han quedado sin respuesta.

Contenido

Este boletín es una publicación de la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública.

COORDINACIÓN
Hugo Balbuena Corro

COLABORADORES
Martha Dávila Vega
Hugo Espinosa Pérez
María de los Ángeles Olivera Bustamante
Irma Griselda Pasos Orellana
Juan Carlos Xique Anaya

COORDINACIÓN EDITORIAL
Elena Ortiz Hernán Pupareli

PRODUCCIÓN EDITORIAL
Alejandro Portilla de Buen

DISEÑO ORIGINAL
María Gabriela Barahona

FORMACIÓN
Julio César Olivares Ramírez

AVISOS

- Atención maestros de educación básica y de las Escuelas Normales. La Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM) los invita a participar en el XV Congreso Nacional de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, que se llevará a cabo del 9 al 11 de diciembre de 1999 en la Universidad Pedagógica Nacional (Ajusco) del D.F. Para mayor información comuníquense a los teléfonos (0172)15-28-90 y 78-13-84 o a los siguientes correos electrónicos:

  rnaasm@edomex1.telmex1.net.com
  mrnava55@hotmail.com
  mdfou@hotmail.com

- Para agilizar la comunicación entre los maestros y el equipo técnico del Área de Matemáticas de la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos, de ahora en adelante podrán enviar su correspondencia a los siguientes correos electrónicos:

  hbalbuen@sep.gob.mx
  Profr. Hugo Balbuena Corro
  Director del Área de Matemáticas

  mdavila@sep.gob.mx
  Profesora Martha Dávila Vega
  Subdirectora del Área de Matemáticas. Primaria

  jcxique@sep.gob.mx
  Profesor Juan Carlos Xique Anaya
  Subdirector del Área de Matemáticas.
  Secundaria

  También, si lo prefieren, pueden enviar por correo su correspondencia a la siguiente dirección:

  OBRERO MUNDIAL 358, PLANTA BAJA,
  COLONIA PIEDAD NARVARTE,
  03000 MÉXICO, D.F.

ASPECTOS de la didáctica

¡TRABAJAR EN EQUIPO!
UNA BUENA ESTRATEGIA PARA EDUCAR HACIENDO MATEMÁTICAS

PROFESOR JUAN CARLOS XIQUE ANAYA

El propósito central de los planes y programas de estudio de la educación básica es integrar conocimientos, habilidades y valores que permitan a los alumnos continuar su aprendizaje con un alto grado de independencia, dentro o fuera de la escuela; facilitar su incorporación productiva y flexible al mundo del trabajo, y participar responsablemente en la vida social, política y cultural del país.

Una buena estrategia para lograr esto desde la clase de matemáticas es *el trabajo en equipo.*

¿QUÉ SIGNIFICA TRABAJAR EN EQUIPO?

Es algo más que trabajar juntos (en el sentido de cercanía). No basta con agrupar a los alumnos en parejas o en pequeños conjuntos para conseguir los beneficios que acarrea este tipo de actividad.

Más bien, se trata de generar un ambiente de trabajo *donde todos asuman la responsabilidad de un objetivo común*: resolver el problema o actividad planteada por el profesor. De esta manera los alumnos aprenden a relacionarse con sus compañeros, haciéndose responsables de sus propios argumentos, respetando el punto de vista de los demás y, mejor aún, ayudando a que todos entiendan y participen en el proceso.

¿QUÉ VENTAJAS TIENE TRABAJAR EN EQUIPO?

En ocasiones se puede pensar que trabajar en equipo implica perder tiempo en la organización de los alumnos, además del tiempo requerido para hacer los movimientos pertinentes del mobiliario. Sin embargo, esta inversión de tiempo se compensa con otros beneficios, por ejemplo, un estudiante por sí solo puede funcionar hasta cierto nivel, pero su potencial se puede incrementar al interactuar con sus compañeros.

Cuando el profesor delega en los equipos la responsabilidad de resolver un problema o realizar una actividad, permite, por un lado, que hagan uso de sus conocimientos previos, elaboren conjeturas, las comuniquen a sus compañeros y las validen. Con esto adquieren cada vez mayor seguridad en sí mismos, ya que dejan de ser solamente receptores pasivos de las explicaciones del profesor y aplicadores de técnicas y procedimientos enseñados en el pizarrón.

Por otro lado, trabajar en equipo permite a los alumnos encontrar más de una estrategia para resolver un mismo problema o realizar una misma actividad. Estas estrategias constituyen una gran riqueza didáctica porque favorecen la comprensión más profunda de los conceptos y principios involucrados, al socializarlas y buscar argumentos para defenderlas o invalidarlas. En este proceso, los alumnos se apropian del vocabulario y medios de expresión matemáticos con un propósito bien definido: comunicar a los demás la manera en la que resolvieron el problema.

La forma en que el alumno interactúa en el equipo dice mucho del ambiente familiar en el que se desenvuelve y es una buena oportunidad para formar al futuro ciudadano, responsable de las tareas comunitarias y respetuoso de las ideas de los otros.

Trabajar en equipo ofrece al profesor la posibilidad de acercarse más a sus alumnos para conocer el grado de avance que va logrando cada uno de ellos, al observar la calidad de sus intervenciones y la manera en la que utilizan los recursos matemáticos para realizar la actividad o enfrentar la situación problemática planteada.

¿SIEMPRE HAY QUE TRABAJAR EN EQUIPO?

Aunque trabajar en equipo constituye el contexto ideal para favorecer que los alumnos construyan el conocimiento por sí mismos, esto no significa que deban excluirse las actividades individuales o el trabajo colectivo dirigido por el profesor.

Con base en el tema que se esté trabajando y en función del problema o reto que se crea conveniente plantear, el profesor tendrá que decidir la pertinencia de trabajar en equipo, y a su vez definir cuántos integrantes conformarán cada uno de ellos.

Algunos especialistas recomiendan organizar los equipos de tal manera que en cada uno haya al menos algún alumno que pueda auxiliar a los compañeros que presenten mayor dificultad. Otros, enfatizan la necesidad de cuidar que todos los integrantes del equipo tengan posibilidad de participar, aunque no de igual manera, es decir, el nivel de eficiencia entre los integrantes de un equipo no debe ser tan distinto. Otros más consideran importante que periódicamente se cambie a los integrantes de los equipos para favorecer un mayor conocimiento e interacción en el grupo.

En fin, cómo integrar los equipos es una tarea que el maestro debe determinar en función de las necesidades del trabajo que van a realizar y de la actitud de los alumnos. Veamos un ejemplo de cómo tomar este tipo de decisiones.

En la página 57 del *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria,* se plantean algunas situaciones cuyo propósito es que los alumnos revisen la lectura, escritura, orden y comparación de números enteros. Veamos dos de ellos:

1. Completa la tabla

SE ESCRIBE	SE LEE
489	
	Doscientos diecisiete
301	
1 012	
	Siete mil quince
700 699	
3 225 140	
	Ocho millones dos mil
	Setecientos veintitrés millones doscientos catorce mil ciento cuarenta
23 321 089 510	

2. Con las siguientes placas se ha escrito "con todas sus letras" el número 1 310

MIL	TRES	CIENTO(S)	DIEZ

a) Encuentra todos los números que pueden escribirse combinando de diferentes formas las cuatro placas anteriores. Ordénalos de menor a mayor.
b) Si se dispone de otra placa con la palabra "siete" ¿cuáles son todos los números que pueden escribirse utilizando las cinco palabras?

Si el profesor decidiera plantear estas situaciones en su clase, tendría que analizarlas para saber cuál de ellas favorece la discusión y exige crear estrategias de solución.

La actividad 1 puede considerarse como una situación sencilla dado que, presumiblemente, los alumnos cuentan con elementos para resolverla de manera individual. Sin embargo la 2 implica un reto más interesante porque lleva a los alumnos a explorar diversas estrategias para resolver el problema. Esta actividad conviene trabajarla en equipo.

¿Cuál es el papel del profesor en esta forma de trabajo?

El profesor tiene la responsabilidad de proponer a los alumnos actividades o problemas que resulten interesantes, que provoquen en los alumnos una actitud de búsqueda e investigación tomando en cuenta que los conocimientos que ya poseen sirvan de base para encontrar la solución.

Durante la sesión, el profesor coordina el trabajo y anima a los alumnos a resolver la situación planteada. Para ello los invita a encontrar la solución como ellos lo consideren conveniente, recorre los equipos, observa cómo enfrentan el problema y la forma en que se relacionan entre ellos. Puede plantear algunas preguntas u ofrecer algunas sugerencias o nuevos retos por ejemplo: ¿para qué hicieron esta operación?, ¿qué significa este número?, ¿será la única forma de resolverlo?, ¿por qué de esa manera?, ¿cómo podemos comprobar el resultado?

¿Qué retos enfrenta el maestro?

Una de las dificultades más comentadas entre los profesores, cuando se les propone realizar actividades en equipo en la clase de Matemáticas, es la disciplina, pues dicen que da lugar a mucho "ruido" y "desorden" generado por los alumnos al interactuar y moverse de sus lugares para comentar con otros compañeros y que sólo unos cuantos son los que trabajan. También es común escuchar que una actividad en la que tienen que manipular materiales, incluso fuera del aula, resulta demasiado engorrosa y ambigua como para llegar al aprendizaje de un contenido formal.

Sin embargo, la mayor dificultad que enfrentan los profesores va mucho más allá de los argumentos sobre el ruido y la disciplina. El reto más importante consiste en superar la sensación de pérdida de control de la actividad. Pero, ¿por qué sentimos que al trabajar en equipos y delegar la responsabilidad de búsqueda de soluciones en los alumnos perdemos el control de la actividad?

La respuesta es sencilla. Porque bajo esta forma de trabajo, los procedimientos de solución a los problemas se diversifican, surgen de los alumnos ideas y preguntas diferentes que no han sido contempladas. Frente a esta situación los maestros nos hacemos preguntas como éstas: ¿qué hacer frente a las diferentes respuestas o procedimientos de los alumnos?, ¿qué hacer si en un momento dado no comprendo los procedimientos que utilizaron?, ¿qué hacer cuando me hagan preguntas que en ese momento no pueda contestar?, con esta forma de trabajo, ¿cómo ayudar a los alumnos que se rezagan?, ¿y el tiempo?

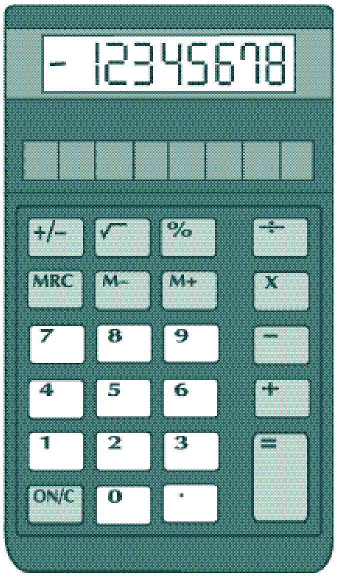
Con el propósito de que los maestros lleven a cabo en sus grupos el trabajo en equipo y se animen a experimentar una manera más creativa de enseñar y aprender matemáticas, a continuación se presentan algunas recomendaciones que les pueden brindar mayor confianza.

- Seleccionar previamente la situación problemática o actividad que va a proponer y analizarla cuidadosamente.
- Prever el material que utilizarán los alumnos y la manera en que va a plantear el problema o la actividad.
- Prever las posibles estrategias de solución que los alumnos puedan generar y las posibles dificultades a las que se enfrentarán.
- Prever los posibles errores que puedan cometer y las preguntas que puede hacer para favorecer que los alumnos los identifiquen y corrijan.
- Identificar los puntos o momentos en los que será importante confrontar las opiniones de los alumnos.
- Preparar otra situación problemática que se derive de la primera con mayor grado de dificultad, para plantearla a los alumnos más adelantados y dar tiempo a los que se rezaguen en la primera fase.

Estamos seguros de que poco a poco dejará de caer en la tentación de "enseñar" a los alumnos cómo pueden resolver la situación o de ser usted quien les indique si lo hicieron bien o mal.

Explorando la calculadora: una experiencia en el aula

Profesora Irma G. Pasos Orellana



En este espacio describiré una de las experiencias sobre el uso de la calculadora en el aula, realizada durante el periodo de preparación de los maestros que participaron en la grabación del video "La calculadora en la escuela". Este programa formará parte de los materiales de apoyo para la actualización de profesores de educación básica y próximamente lo tendrán a su disposición en las videotecas de los Centros de Maestros, así como en las bibliotecas de las Escuelas Normales.

Previamente a la grabación del video, el equipo técnico del Área de Matemáticas de la DGMME trabajó, durante un mes, con algunos maestros de la escuela Benito Juárez,[1] asesorándolos sobre cómo organizar y conducir, de acuerdo con el enfoque actual, algunas actividades que favorezcan el aprendizaje utilizando la calculadora como recurso didáctico.

Dado que las funciones de las calculadoras varían dependiendo del modelo, en esta experiencia se decidió eliminar esta variable utilizando el mismo tipo de calculadora para todos los alumnos. De esta manera se evitaba que desviaran su atención hacia la diversidad de modelos y funciones.

La experiencia que a continuación describo se llevó a cabo en un grupo de segundo grado, atendido por una maestra muy dispuesta

[1] Escuela oficial del D.F.

a participar en el proyecto. En la primera charla que sostuve con ella para ponernos de acuerdo en el horario y la primera actividad que trabajaríamos, la maestra manifestó saber que en el fichero de segundo venían algunas actividades en las que los niños usaban calculadora, pero que no había aplicado alguna porque no sabía cómo hacerlo, porque los niños eran todavía muy pequeños y no sabía cómo iban a reaccionar los padres de familia.

Con el propósito de mostrar, en la práctica, la manera en la que se pretende realizar las actividades, pedí a la maestra que me permitiera conducir la primera clase, que ella observara y al final la comentáramos. La maestra accedió con agrado e incluso prefirió que así fuera.

La clase se llevó a cabo de la siguiente manera: formé equipos de cuatro alumnos cada uno; repartí una calculadora por niño, e inicié la clase con estas preguntas: ¿conocen esta maquinita?, ¿saben para qué sirve? Algunos alumnos contestaron: "para hacer cuentas"; un niño dijo: "Mi papá la usa en su trabajo"; otro comentó: "mi hermano que está en la prepa la usa en la escuela y para hacer su tarea"; otro más dijo: "yo he visto que el señor de la tienda la usa para saber cuánto va a cobrar", etcétera.

Cuando pregunté si alguna vez habían usado una calculadora la mayoría manifestó que sí, algunos la conocían pero no la habían utilizado, y sólo dos niñas dijeron nunca haberlas visto. Pedí que en equipos comentaran lo que sabían hacer con la calculadora. Mientras, yo observaba lo que hacían.

En dos equipos los alumnos se mostraban entre sí cómo sumar y restar. A veces proponían sumas o restas de dígitos de los que ya sabían cuál era el resultado y otras veces proponían cantidades mayores. Los demás equipos jugaban a formar palabras con la calculadora, juego al que poco después se unió todo el grupo.

Después de un tiempo, pedí a los diferentes equipos que explicaran lo que habían hecho. En general, enseñaron a sus compañeros cómo formar las palabras "BEBE", "LOBO", "BOBO", "GOL" Y "OSO". Otros niños enseñaron cómo se sumaba con la calculadora y otros cómo se restaba. El resto del grupo tecleaba en sus calculadoras siguiendo las indicaciones de sus compañeros. Era notoria la sorpresa de los niños que antes no habían tenido esta experiencia. Observaban con atención cómo podían formar palabras tecleando números y se emocionaban al obtener los resultados de las sumas y de las restas planteadas por sus compañeros.

Cuando ya no tuvieron más que decir, pregunté cuáles números tenían las teclas de la calculadora y por qué sólo estaban los números del 0 al 9. Un niño de inmediato dijo: “Porque con estos números se forman todos los demás” y mostró a sus compañeros algunos ejemplos. Para terminar con esta primera parte de la clase, pregunté con cuáles números se pueden formar letras (S, O, G, g, E, L, I, B) y, propuse que de tarea buscaran otras palabras que se pudieran formar en la calculadora.

Para continuar con la exploración de la calculadora, pregunté si sabían para qué servían las teclas $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{x}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{=}$, $\boxed{\%}$ y $\boxed{\sqrt{\ }}$. Para mi sorpresa y la de la maestra, la mayoría de los alumnos sabía para qué servían, incluso la de $\boxed{\%}$, por las ofertas de las tiendas. Algunos niños conocían la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ sólo de nombre. En cuanto a las teclas $\boxed{ON/C}$, $\boxed{+/-}$,[2] $\boxed{M+}$, $\boxed{M-}$, $\boxed{MRC}$, sólo identificaron $\boxed{ON/C}$ como la tecla que sirve para encender la calculadora, por lo que sugerí que investigaran con sus papás o con sus hermanos para qué servían las demás teclas y lo comentaran en la siguiente clase.

Al final de la actividad la maestra, sorprendida de lo que los niños saben acerca de la calculadora, dijo: “....creemos que no saben nada, cuando en ocasiones saben más que nosotros”, refiriéndose a las posibilidades de aprendizaje que los niños tienen en la vida cotidiana y con los hermanos mayores. En cuanto a la actitud de los niños frente a la actividad comentó: “... era un verdadero ambiente de juego..., sin inhibiciones, se escuchaba algarabía..., pero todos metidos en la actividad atentos a las indicaciones que alguno de sus compañeros hacía para sumar, restar o para obtener nuevas palabras”.

Comenté con ella algunas cuestiones sobre la importancia de que los niños trabajen en equipo y de que sean ellos los que comenten con sus compañeros lo que saben y sus descubrimientos. Finalmente le pregunté si identificaba el propósito de esta primera actividad, a lo que respondió que “daba la pauta para que los maestros se dieran cuenta de que la mayoría de los niños pequeños que cursan la primaria saben muchas cosas sobre el funcionamiento de la calculadora porque han tenido contacto con esta tecnología”. Agregué al comentario que por lo menos los niños que viven en zonas urbanas tienen más posibilidades de conocer y usar las calculadoras.

“Bueno —dijo la maestra— ¿qué hay sobre las otras teclas? —refiriéndose a las teclas, $\boxed{ON/C}$, $\boxed{+/-}$, $\boxed{M+}$, $\boxed{M-}$, $\boxed{MRC}$ —, ¿las van a aprender a usar?” Le contesté que se trabajarían sobre la marcha. Mientras tanto le mostré, con algunos ejemplos, la función de

[2] Las calculadoras sencillas carecen de esta tecla.

las teclas $\boxed{M +}$ (memoria) y $\boxed{MRC}$ (recuperar memoria), previendo que en la siguiente clase los niños lo hubieran investigado. Preparamos una actividad que permitiera a los niños darse cuenta de la función de estas teclas.

Al día siguiente la maestra condujo la actividad. Dos niños llevaban información sobre la función de las teclas $\boxed{M +}$ y $\boxed{MRC}$. Uno de ellos dijo que la tecla $\boxed{M +}$ era la memoria, pero que no sabía cómo se utilizaba. El otro trató de mostrar la utilidad de esta misma tecla y la de $\boxed{MRC}$. Introdujo bien un número en la memoria, pero ya no supo qué hacer con él. La maestra intervino. Anotó en el pizarrón: 6 + 8 + 4 + 3 + 9 + 7 =, pidió que con la calculadora hicieran la suma con la siguiente condición: cada tres números sumen un 5**.** Anotó en el pizarrón lo siguiente: 6 + 8 + 4 + 5 = __ + 3 + 9 + 7 + 5 = ___

Para comparar los resultados, pasó a un niño a escribir en el pizarrón las cantidades que faltaban: 6 + 8 + 4 + 5 = <u>23</u> + 3 + 9 + 7 + 5 = <u>47</u>. Todos obtuvieron los mismos resultados.

Luego pidió que oprimieran la tecla $\boxed{ON / C}$ para borrar la información, que oprimieran las teclas $\boxed{5}$ y $\boxed{M +}$ y observaran la pantalla. Al principio los alumnos no notaron que en el ángulo superior izquierdo de la pantalla apareció una M y cuando la vieron no sabían por qué aparecía. La maestra les dijo que esa M significa que en la memoria está guardado el 5, listo para sumarlo cuando se lo indiquen a la calculadora. Les pidió que volvieran a realizar la suma, pero en lugar de oprimir el $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ oprimieran las teclas $\boxed{+}$, $\boxed{MRC}$ e $\boxed{=}$ y observaran lo que pasaba. Los niños asombrados vieron que al oprimir esas teclas automáticamente se sumaba 5 a la última cantidad que tenían en la pantalla.

Sin que la maestra lo indicara, los niños comenzaron a probar con otras cantidades y a explicarse entre sí la función de esas teclas. La maestra hizo una pausa para dar tiempo a los comentarios y después pidió que un representante de cada equipo pasara a explicar lo que habían observado.

Muchas manos se levantaron para participar, una niña dijo: “la tecla $\boxed{MRC}$ se convirtió en 5”. El niño que anteriormente había tratado de explicar estas funciones, dijo: “No se convirtió en 5, lo que pasó es que la tecla $\boxed{M +}$ lo guardó y ...”, la maestra lo interrumpió con esta pregunta: “¿Por qué oprimieron la tecla $\boxed{MRC}$ para que apareciera el 5 en vez de oprimir la tecla $\boxed{M +}$?”, el mismo niño respondió: “porque $\boxed{M +}$ la guardó y la otra lo llama”.

Para comprobar la hipótesis del niño, la maestra pidió que oprimieran dos veces $\boxed{ON / C}$ para borrar lo anterior y sumaran las mismas cantidades escritas en el pizarrón pero que en lugar de sumar $\boxed{5}$ cada tres números sumaran $\boxed{8}$, utilizando las teclas $\boxed{M+}$ y $\boxed{MRC}$ y compararan sus resultados.

Al operar con la calculadora a algunos niños se les olvidaba meter primero el 8 a la memoria pero, al comparar su resultado con sus compañeros de equipo se daban cuenta de que algo habían hecho mal. Poco a poco, con la ayuda de sus compañeros, lograron utilizar de manera más adecuada las funciones de estas teclas. Al terminarse el tiempo de la clase los alumnos lo lamentaron.

Para las siguientes sesiones preparamos actividades en las que, además de utilizar funciones con otras teclas se involucraban contenidos del programa de matemáticas de segundo grado, favoreciendo el desarrollo de habilidades para calcular resultados mentalmente.

Conforme la maestra realizaba nuevas actividades, desaparecía el temor a la opinión de los padres de familia por usar la calculadora en la escuela, ya que empezamos a observar que ellos mismos se las compraban a sus hijos. Muy pronto más de la mitad del grupo tenía calculadora propia y el interés de los alumnos se acrecentaba. Observamos cómo los alumnos ponían constantemente en práctica lo que aprendían a hacer con la calculadora.

La hora de recreo se convirtió para los niños en un espacio para jugar con la calculadora y enseñar a niños de otros grupos lo que sabían hacer con ella.

El día anterior a la grabación pedí a la maestra su opinión sobre las actividades realizadas, la actitud de los niños al llevarlas a cabo, su utilidad para construir y consolidar aprendizajes y sobre la calculadora misma como recurso didáctico.

La maestra comentó: "...no sólo los niños aprendieron sino yo también: yo sólo conocía las funciones de las operaciones fundamentales; de las otras teclas, ni idea de para qué servían. Además, me he convencido de que la calculadora es un recurso útil, novedoso y divertido con el que los niños pueden aprender matemáticas". En cuanto a la actitud de los niños, señaló: "con estas actividades los alumnos se interesan en buscar la solución o los resultados, ... no lo sienten como clases; lo toman como un paréntesis de entretenimiento, pero han aprendido mucho".

Usted maestro, ¿ha trabajado con sus alumnos algunas actividades con la calculadora? Si no lo ha hecho, lo invito a empezar con estas actividades, a diseñar otras o seleccionar algunas de las que se proponen en el video.

Respuestas a problemas

DIFERENTES PROCEDIMIENTOS

En esta ocasión mostraremos soluciones y procedimientos generados por maestros para resolver algunos de los problemas propuestos en el boletín *Un reto más* números 3 y 4.

¿EN QUÉ CIFRA TERMINAN?

¿En qué cifra terminan los números 2^{65}, 2^{144}, 2^{1507}?

El profesor Mario Felipe Ramírez Hernández, de la Escuela Normal Rural "Luis Villarreal", de El Mexe, Hidalgo, envió el siguiente procedimiento que permite resolver estos y otros problemas similares.

Observando las primeras potencias de 2 con exponentes enteros positivos, encontramos que:

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$	$2^{13} = 8\,192$	$2^{17} = 131\,072$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1\,024$	$2^{14} = 16\,384$	$2^{18} = 262\,144$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2\,048$	$2^{15} = 32\,768$	$2^{19} = 524\,288$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} = 4\,096$	$2^{16} = 65\,536$	$2^{20} = 1\,048\,576$

1. Si el exponente es algún elemento de la siguiente progresión aritmética: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,...; cuyo término enésimo es $4n$-3, siendo n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...; la última cifra es 2.
2. Si el exponente es algún elemento de la progresión aritmética: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34,...; cuyo término enésimo es $4n$-2 siendo n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...; la última cifra es 4.
3. Si el exponente es algún elemento de la progresión aritmética: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35,...; cuyo término enésimo es $4n$-1 siendo n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...; la última cifra es 8.
4. Si el exponente es algún elemento de la progresión aritmética: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,...; cuyo término enésimo

es $4n$ siendo $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...$;
la última cifra es 6.

Solución

2^{65} termina en 2, porque el exponente 65 se obtiene de $4n-3$, siendo $n = 17$.
2^{144} termina en 6, porque el exponente 144 se obtiene de $4n$ siendo $n = 36$.
2^{1507} termina en 8, porque el exponente 1507 se obtiene de $4n-1$ siendo $n = 377$.

¿QUÉ DÍGITOS OCUPAN EL LUGAR DE LAS UNIDADES Y LAS DECENAS EN EL NÚMERO 2^{1998}?

Apoyándose en el procedimiento anterior el profesor Mario Felipe sabe que en el resultado de 2^{1998} el lugar de las unidades lo ocupa un 4, porque el exponente 1998 se obtiene de $4n-2$, siendo $n = 500$.

Para determinar el dígito de las decenas, elabora la siguiente tabla y observa las regularidades que se presentan.

$2^2 = 04$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$	$2^{14} = 16384$	$2^{18} = 262144$
$2^{22} = 4194304$	$2^{26} = 67108864$	$2^{30} = 1073741824$	$2^{34} = 1717986184$	$2^{38} =$ 44
$2^{42} = 4398046511104$	$2^{46} =$ 64	$2^{50} =$ 24	$2^{54} =$ 84	$2^{58} =$ 44
$2^{62} =$ ....04 . . .	$2^{66} =$ ....64 . . .	$2^{70} =$ ....24 . . .	$2^{74} =$ 84	$2^{78} =$ 44
$2^{20n+2} =$ 04	$2^{20n+6} =$ 64	$2^{20n+10} =$ 24	$2^{20n+14} =$ 84	$2^{20n+18} =$ ...44

SOLUCIÓN

Tanto en las decenas como en las unidades el dígito es 4, porque el exponente 1998 se obtiene de $20n + 18$, siendo $n = 99$.

El profesor Fausto Sánchez Rosas, de Mérida, Yucatán, para resolver los mismos problemas empezó, como el profesor Mario Felipe, elaborando una tabla en la que elevó el 2 hasta su trigésima potencia. Después de analizar las regularidades que presentaban los resultados propone el siguiente procedimiento:

Como vemos que la cifra de las unidades se repite en periodos de 4 (2, 4, 8, 6, ...), para saber qué cifra ocupa el lugar de las unidades en un número determinado, dividimos el exponente entre el valor del periodo, descartamos el cociente y, puesto que son periodos completos, el residuo nos indica la posición de la cifra en el periodo.

16 $2^{65} \longrightarrow 4\overline{)65}$ 25 01	Descartamos 16 periodos completos. El residuo indica que la última cifra de 2^{65} se encuentra en la primera posición dentro del periodo 17. la última cifra es 2.
36 $2^{144} \longrightarrow 4\overline{)144}$ 024 0	El residuo de la división indica que la última cifra de 2^{144} se encuentra en la última posición del periodo 36. la última cifra es 6.
376 $2^{1507} \longrightarrow 4\overline{)1507}$ 030 27 3	El residuo indica que la última cifra de 2^{1507} se encuentra en la tercera posición del periodo 377. la última cifra es 8.
99 $2^{1998} \longrightarrow 20\overline{)1998}$ 0198 18	En este caso, al observar los resultados de la tabla se da cuenta que la cifra de las decenas se repite en periodos de 20. Concluye que, en el resultado de 2^{1998}, el dígito 4 ocupa el lugar de las decenas por estar en la posición 18 del periodo 100.

LA BALANZA Y LAS PESAS

Un vendedor tiene cuatro pesas y puede pesar cualquier número entero entre 1 y 40 kilogramos, inclusive. ¿Qué pesas tiene?

El profesor Juan Bosco Gómez Rábago, de Veracruz, Veracruz, nos dice:

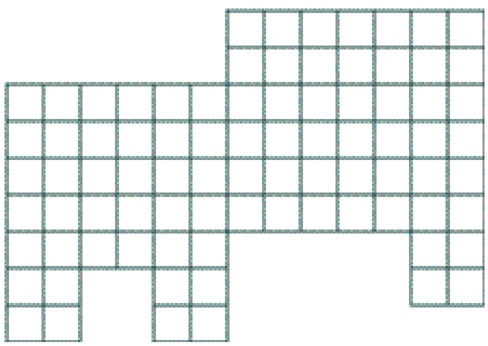
"Mi planteamiento fue el siguiente: buscar cuatro números que sumados dieran 40 y que combinándolos con sumas y restas, permitieran determinar todas las demás cantidades."

"Los pesos 2, 3 y 4 los hallé por tanteo, y los otros se obtuvieron buscando la diferencia, encontrando que *las pesas que tiene el vendedor son de 1, 3, 9 y 27 kg*. Estas pesas las coloca, en algunos casos, en los dos platillos de la balanza. Por ejemplo, para pesar 17 kg, coloca en el plato de la izquierda las pesas de 1 y 9 kg y, en el de la derecha la de 27 kg (27-10 = 17). Después, añade en el plato de la izquierda lo que se debe pesar hasta lograr el equilibrio. En la siguiente tabla se muestran los casos en los que se debe realizar esta operación para lograr el peso deseado."

Platillo izquierdo			Platillo derecho
Peso de la mercancía (kg)	+ Pesas (kg)	=	Pesas (kg)
2	1	=	3
5	1 y 3	=	9
6	3	=	9
7	3	=	1 y 9
8	1	=	9
11	1	=	3 y 9
14	1, 3 y 9	=	27
15	3 y 9	=	27
16	3 y 9	=	1 y 27
17	1 y 9	=	27
18	9	=	27
19	9	=	1 y 27
20	1 y 9	=	3 y 27
21	9	=	3 y 27
22	9	=	1, 3 y 27
23	1 y 3	=	27
24	3	=	27
25	3	=	1 y 27
26	1	=	27
29	1	=	1 y 27
32	1 y 3	=	9 y 27
33	3	=	9 y 27
34	3	=	1, 9 y 27
35	1	=	9 y 27
38	1	=	3, 9 y 27

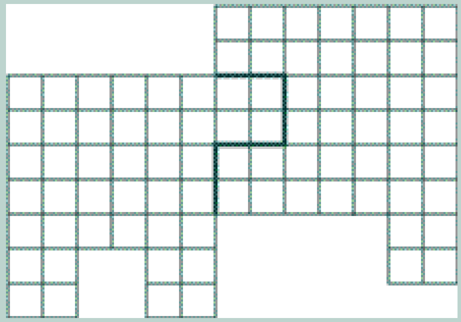
ROMPIENDO CABEZAS

Separar la siguiente figura en dos partes exactamente iguales en forma y tamaño.



¿Qué conocimientos, habilidades o destrezas puso en juego para resolver este problema?

La siguiente y única respuesta, para este problema, fue enviada por el profesor Alfonso Rico Solorio.



Es claro que este tipo de ejercicios promueven en el alumno sus habilidades de ubicación espacial y también desarrollan su percepción geométrica, aspecto muy descuidado por los maestros en general.

Los invitamos nuevamente a que nos envíen sus procedimientos y resultados de los problemas planteados en este boletín y de los que se han propuesto en boletines anteriores ya que algunos se han quedado sin respuesta. Recuerden que compartir las experiencias redunda en el aprendizaje de todos.

Problemas para resolver

IMPORTANCIA DE LA "ACCIÓN" EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE

Diferentes investigadores han destacado la importancia de "la acción" en el proceso de construcción de conocimientos. La epistemología genética de Jean Piaget explica el paso de un estado a otro mediante una serie de asimilaciones y acomodaciones que se derivan de la acción del sujeto sobre el objeto de conocimiento. Las investigaciones en didáctica de las matemáticas llevadas a cabo por Guy Brousseau hacen referencia a las situaciones de acción en las que los sujetos ponen a prueba sus conocimientos previos y confirman o rechazan hipótesis en la búsqueda de estrategias para resolver un problema.

La propuesta metodológica de Dienes, que fue muy aceptada durante la década de los setenta, contiene una buena dosis de acción sobre materiales manipulables que encierran una estructura matemática para ser descubierta por los alumnos. Estos tres extractos, que hacen referencia a la acción, han desempeñado un papel decisivo para superar el esquema rígido que simplemente delinea un camino para pasar de lo concreto a lo gráfico y a lo simbólico.

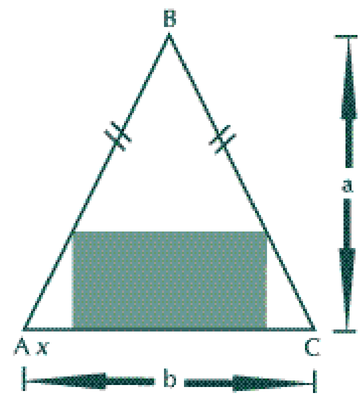
Así como la acción no implica necesariamente el uso de material manipulable, el uso del material tampoco implica necesariamente la acción intelectual por parte del alumno.

EL VALOR DE *x*

El profesor Fernando A. Castañón Jiménez, de Minatitlán, Veracruz, propone resolver el siguiente problema que aparece en la página 282 del *Libro para el maestro. Matemáticas*. *Educación Secundaria.*

Observe la siguiente figura.

¿Cuánto debe medir *x* para que el área del rectángulo sombreado sea la mitad del triángulo isósceles?



MULTIPLICANDO AL ESTILO RUSO

Supongamos que deseamos multiplicar 120 por 42; con estos números formaremos dos columnas. A continuación y en pasos sucesivos, iremos dividiendo entre 2 los números de la columna izquierda, y a la vez duplicamos los números de la columna derecha, como se muestra a continuación:

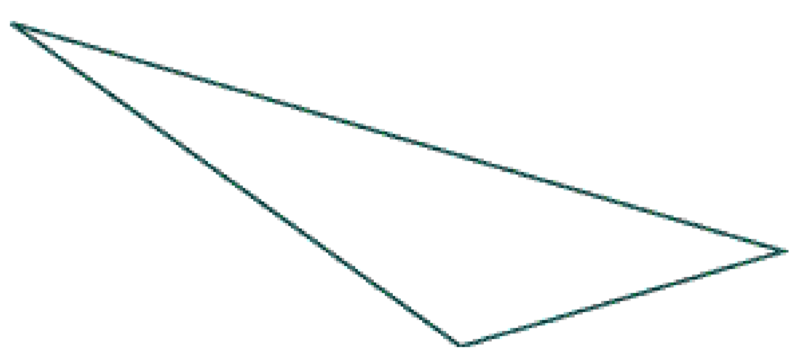
~~120~~	~~42~~
~~60~~	~~84~~
~~30~~	~~168~~
15	336
7	672
3	1344
1	2688
	5040

Ahora tachamos los números pares que aparecen en la columna izquierda y los números que les corresponden de la columna derecha.

Finalmente sumamos los números que no están tachados en la segunda columna y obtenemos el resultado de la multiplicación 120 × 42.

El profesor Alfonso Rico Solorio, de Toluca, Estado de México, pregunta: ¿Cuál es la explicación que justifica el funcionamiento de este algoritmo para multiplicar?

Observe la siguiente figura y busque una manera de dividirla en tercios.



¿De qué se trata?

¿De buscar estrategias de solución para aprender matemáticas o de memorizar respuestas?*

Profesor Hugo Balbuena Corro

En los números anteriores de *Un reto más* hemos utilizado este espacio para comentar el contenido de algún libro que nos pareció interesante y recomendarlo para su lectura. Esta vez no decimos de qué trata sino preguntamos ¿de qué se trata?, porque nos ha causado una sorpresa muy desagradable la comercialización de un libro malamente titulado *Autoevaluación del Curso Nacional de Matemáticas. Segunda parte,*[1] que seguramente muchos maestros compraron, con la esperanza de obtener un buen resultado en el examen de acreditación del Programa Nacional de Actualización Permanente (Pronap).

Vayamos por partes. ¿Por qué considero que este libro malamente se titula *Autoevaluación del Curso Nacional de Matemáticas. Segunda parte*? Sencillamente porque el título no corresponde al contenido del libro. Porque una actividad de autoevaluación implicaría poner a prueba los conocimientos y habilidades de quien o quienes se autoevalúan, con el fin de recabar información que permita superar las deficiencias encontradas. Se podría pensar en un instrumento con características similares a las del examen de acreditación y proporcionar parámetros que indicaran tanto el nivel alcanzado como algunas sugerencias para tratar de superar dicho nivel. El libro al que nos referimos carece de lo anterior. Lo que en él se puede leer es simple y llanamente el punto de vista de los autores para contestar las situaciones problemáticas que se plantean en el material de estudio *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte.*

¿Por qué una sorpresa tan desagradable? Existen varias razones y voy a tratar de explicar algunas:

[1] Juan Ortega y Luis Raúl Cruz, *Autoevaluación del Curso Nacional de Matemáticas. Segunda parte*, Estado de México, Editorial Auroch, 1999.

- El paquete didáctico para el curso nacional de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros* (primera y segunda partes) fue elaborado con la idea de mejorar sustancialmente la preparación de los maestros tanto en el conocimiento matemático como en la teoría didáctica desde la cual se analizan los procesos de enseñanza, estudio y aprendizaje. De los dos aspectos anteriores (conocimiento matemático y teoría didáctica), se desprenden varios componentes que dan al maestro posibilidades más amplias para favorecer que sus alumnos estudien y aprendan matemáticas de una manera más grata y creativa. Por ejemplo, el análisis de los contenidos matemáticos previos a las actividades planteadas; de las variables didácticas que pueden modificar su nivel de complejidad; de los posibles procedimientos, dificultades y errores de los niños; de las formas más adecuadas para organizar dichas actividades, etcétera.
- Un propósito y a la vez una condición para el éxito del curso es el cambio de actitud que se pueda generar en los maestros. Por ejemplo, que dejen de ver la matemática como un conjunto de técnicas que es necesario memorizar; que sientan el aprendizaje de las matemáticas no sólo como algo posible sino además apasionante, que consideren a los errores como parte del proceso de aprender, en lugar de algo que se deba sancionar y evitar; que hagan suyos los problemas y se responsabilicen de las soluciones que encuentren. En la medida que se logren estos cambios de mentalidad en los profesores, habrá estilos docentes que favorezcan la construcción de saberes por parte de los propios alumnos.
- Si bien sería demasiado pretensioso decir que todas las actividades que se plantean en el curso logran conectarse con los saberes previos de los profesores y hacerlos evolucionar en alguna medida, éste es otro de los propósitos del paquete didáctico.

Lo anterior explica por qué el paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros* (primera y segunda partes), es un repertorio de ingenierías didácticas que colocan al maestro en situación de fortalecer, reformular o rechazar sus conocimientos previos para producir otros nuevos. Sin duda este material se puede mejorar y enriquecer en muchos aspectos, sobre todo a partir de la experiencia de quienes lo han utilizado para actualizar su formación profesional.

Pero...¿de qué se trata? En la presentación del libro que se comenta se anuncia "... la forma de encontrar el resultado...” de los cuestionamientos del paquete didáctico, lo cual es un abuso del lenguaje, ya que lo que presentan no es la forma de encontrarlos sino los propios resultados, más un intento de justificación que en muchos casos es incorrecta.

Para muestra basta un botón: en el capítulo I, actividad 1, problema 1, inciso b, del libro *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte*, se plantea el siguiente problema:

> Cinco niños se van a repartir siete pastelitos iguales. Quieren que a cada quien le toque lo mismo y que no sobre nada de pastel. ¿Cuánto pastel le tocará a cada niño?

En el libro de respuestas dice: “A cada niño le tocará 7/5 de pastel porque 7/5 es mayor que 5/5 los cuales son iguales a un entero”. Es evidente que el porqué con el que los autores de este libro justifican la respuesta no tiene sentido, puesto que hay un número infinito de fracciones que también son mayores que 5/5 y no son la solución del problema.

Compañeras y compañeros maestros, en materia de evaluación abundan los materiales impresos que tratan de reducir este aspecto tan importante del proceso didáctico a la finalidad de pasar un examen: pruebas mal elaboradas, programas tutoriales que fomentan la memorización, libros de respuestas como el que hemos comentado, etcétera. Recuerden que la ley del menor esfuerzo en el estudio arroja resultados muy endebles en el aprendizaje.

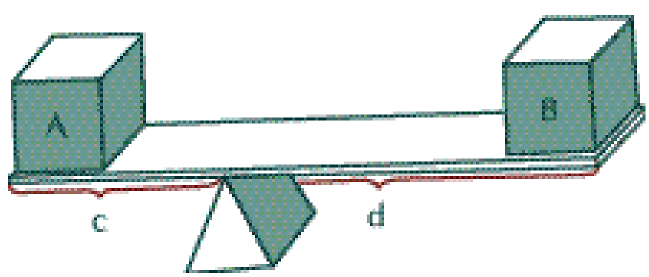
Los invito a confiar cada vez más en sus posibilidades para analizar y resolver problemas y a darse la oportunidad de entusiasmarse al encontrar soluciones.

MATEMÁTICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO GRATUITOS Y LOS MATERIALES DE APOYO

Los siguientes problemas aparecen en las páginas 253 y 257, respectivamente, del paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera parte,* del Pronap. Si ya encontró las soluciones describa el procedimiento que siguió en cada caso y envíelas por correo.

Si un ángulo de 30° es visto con una lente que aumenta cinco veces el tamaño normal de las cosas, ¿qué medida tendrá el ángulo a través de la lente?

Los pesos de los cubos *A* y *B* guardan la misma relación que las distancias *c* y *d*. La distancia *d* mide 3 y la *c* mide 2. El cubo *A* pesa 60 kg. ¿Cuánto pesa el cubo *B*?



En las páginas 25 y 28, respectivamente, de *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio. Primer nivel,* del Pronap se presentan los siguientes problemas. Resuélvalos y descríbanos los procedimientos que siguió para solucionarlos:

Lo único que se sabe de dos cantidades A y B es que: A está entre 13.5 y 13.7 y B está entre 7.9 y 8.1

¿Entre qué valores se encuentran los siguientes resultados?:

a) $A + B$
b) AB
c) A / B
d) $(A + B) \div (A - B)$

Considere un círculo y un hexágono regular de áreas iguales, ¿cuál tiene menor perímetro? Justifique su respuesta.